Beispielbeweis Isomorphie

Aufgabe

Beweisen Sie, dass $[\![a.0]\!]$ und $[\![a.(0+0)]\!]$ isomorph sind.

Definition Isomorphie (Skript)

Definition 8 (*Isomorphie*). Zwei Transitionssysteme $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ und $TS' = (S', \longrightarrow', s_0')$ sind *isomorph* ($TS \sim_{\text{iso}} TS'$), wenn es eine Bijektion b gibt mit

$$b : Reach(TS) \to Reach(TS'), \text{ so dass } b(s_0) = s_0'$$

und für alle $s_1, s_2 \in Reach(TS)$ und alle $\alpha \in Act$ gilt:

$$s_1 \xrightarrow{\alpha} s_2 \text{ gdw. } b(s_1) \xrightarrow{\alpha}{}' b(s_2)$$

Beweis

Hinweis

Der schwarze Text gehört zum eigentlichen Beweis. Graue Texte sind Hinweise zur Vorgehensweise.

Damit $TS = [\![a.0]\!]$ und $TS' = [\![a.(0+0)]\!]$ isomorph sind, brauchen wir laut Definition der Isomorphie eine Bijektion $b : Reach(TS) \to Reach(TS')$.

Es gilt: $Reach(TS) = \{a.0, 0\}$, $Reach(TS') = \{a.(0+0), 0+0\}$.

Wir setzen $b : Reach(TS) \to Reach(TS')$ mit $b(a.0) = a.(0+0)$ und $b(0) = 0+0$. Außerdem soll umgekehrt $b^{-1}\big(a.(0+0)\big) = a.0$ und $b^{-1}(0+0) = 0$ gelten. Damit ist b eine Bijektion.

Nun müssen wir zeigen, dass $b(s_0) = s_0'$.

Damit gilt laut Definition von b, dass $b(s_0) = b(a.0) = a.(0+0) = s_0'$.

Bleibt noch zu zeigen, dass für alle $s_1, s_2 \in Reach(TS)$ und alle $\alpha \in Act$ gilt:

$$s_1 \overset{\alpha}{\to} s_2 \text{ gdw } b(s_1) \overset{\alpha}{\to} b(s_2)$$

Das „gdw." sagt uns, dass wir beide Richtungen zeigen müssen.
Zuerst die Hinrichtung:

$a.0$ kann nur gemäß der Regel **prefix** mit a nach 0 gehen.
$b(a.0) = a.(0+0)$ kann auch laut **prefix** mit a nach $b(0) = 0+0$ gehen.

0 kann keine Aktionen ausführen.

Und nun zurück:

$a.(0+0)$ kann nur gemäß **prefix** mit a nach $0+0$ gehen.
Wie oben schon gezeigt, kann auch $b^{-1}\big(a.(0+0)\big) = a.0$ mit a nach $b^{-1}(0+0) = 0$ gehen.

$0+0$ kann keine Aktionen ausführen.

Damit sind alle möglichen Zustände und Aktionen betrachtet. ■