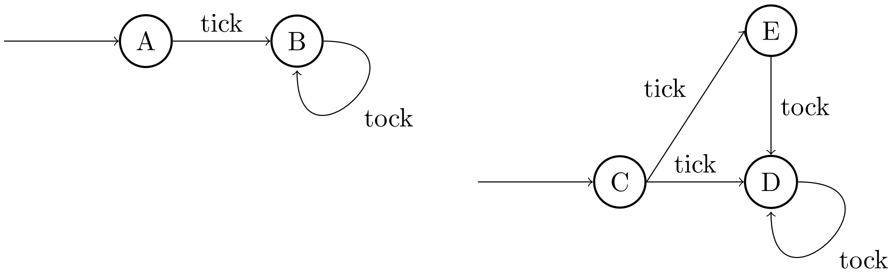
Beispielbeweis Bisimulation

Aufgabenstellung

Beweisen Sie, dass die in der folgenden Abbildung gegebenen LTS bisimilar sind – genauer: dass ihre Startzustände zueinander bisimilar sind:



Definitionen

Definition: (Starke) Bisimulation
Eine binäre Relation $\mathcal{R}$ auf einem LTS $TS = (S, \rightarrow, s_0)$ ist eine Bisimulation, wenn $s \mathrel{\mathcal{R}} t$ impliziert, dass für alle $\alpha \in Act$ gilt:

- wenn $s \xrightarrow{\alpha} s'$, dann gibt es eine Transition $t \xrightarrow{\alpha} t'$, so dass $s' \mathrel{\mathcal{R}} t'$,
- wenn $t \xrightarrow{\alpha} t'$, dann gibt es eine Transition $s \xrightarrow{\alpha} s'$, so dass $s' \mathrel{\mathcal{R}} t'$.

Zwei Zustände s und t sind genau dann *bisimilar*, geschrieben $s \sim t$, wenn es eine Bisimulation $\mathcal{R}$ gibt mit $s \mathrel{\mathcal{R}} t$.

Beweis

Hinweis: Graue Teile des Textes sind nicht Teil des Beweises, sondern sind Hinweise zur Vorgehensweise.

Wir wollen zeigen, dass $A \sim C$ gilt. Dazu geben wir eine Bisimulation $\mathcal{R}$ mit $A \mathrel{\mathcal{R}} C$ – also $(A, C) \in \mathcal{R}$ – an.

Wir setzen $\mathcal{R} \coloneqq \{(A, C), (B, D), (B, E)\}$. Damit ist $A \mathrel{\mathcal{R}} C$ erfüllt.

Nun müssen wir noch zeigen, dass es sich bei $\mathcal{R}$ um eine Bisimulation handelt.

1. Für alle $s \mathrel{\mathcal{R}} t$ und $\alpha \in \mathit{Act}$ ist zu zeigen: Wenn $s \xrightarrow{\alpha} s'$, dann gibt es eine Transition $t \xrightarrow{\alpha} t'$, so dass $s' \mathrel{\mathcal{R}} t'$.

   Um dies zu zeigen, betrachten wir alle s, t und $\alpha \in \mathit{Act}$ mit $s \mathrel{\mathcal{R}} t$ und $s \xrightarrow{\alpha} s'$.

   - $A \mathrel{\mathcal{R}} C$ und $A \xrightarrow{tick} B$

     Es gelten auch $C \xrightarrow{tick} D$ und $B \mathrel{\mathcal{R}} D$, womit die rechte Seite der Implikation erfüllt ist.

     Hier hätte man auch $C \xrightarrow{tick} E$ mit $B \mathrel{\mathcal{R}} E$ angeben können.
   - $B \mathrel{\mathcal{R}} D$ und $B \xrightarrow{tock} B$

     Es gelten auch $D \xrightarrow{tock} D$ und $B \mathrel{\mathcal{R}} D$, womit die rechte Seite der Implikation erfüllt ist.
   - $B \mathrel{\mathcal{R}} E$ und $B \xrightarrow{tock} B$

     Es gelten auch $E \xrightarrow{tock} D$ und $B \mathrel{\mathcal{R}} D$, womit die rechte Seite der Implikation erfüllt ist.
   - Es gibt keine weiteren Kombinationen von s, t und $\alpha \in \mathit{Act}$ mit $s \mathrel{\mathcal{R}} t$ und $s \xrightarrow{\alpha} s'$.

2. Für alle $s \mathrel{\mathcal{R}} t$ und $\alpha \in \mathit{Act}$ ist zu zeigen: Wenn $t \xrightarrow{\alpha} t'$, dann gibt es eine Transition $s \xrightarrow{\alpha} s'$, so dass $s' \mathrel{\mathcal{R}} t'$.

   Um dies zu zeigen, betrachten wir alle s, t und $\alpha \in \mathit{Act}$ mit $s \mathrel{\mathcal{R}} t$ und $t \xrightarrow{\alpha} t'$.

   - $A \mathrel{\mathcal{R}} C$ und $C \xrightarrow{tick} D$

     Es gelten auch $A \xrightarrow{tick} B$ und $B \mathrel{\mathcal{R}} D$, womit die rechte Seite der Implikation erfüllt ist.
   - $A \mathrel{\mathcal{R}} C$ und $C \xrightarrow{tick} E$

     Es gelten auch $A \xrightarrow{tick} B$ und $B \mathrel{\mathcal{R}} E$, womit die rechte Seite der Implikation erfüllt ist.
   - $B \mathrel{\mathcal{R}} D$ und $D \xrightarrow{tock} D$

     Es gelten auch $B \xrightarrow{tock} B$ und $B \mathrel{\mathcal{R}} D$, womit die rechte Seite der Implikation erfüllt ist.
   - $B \mathrel{\mathcal{R}} E$ und $E \xrightarrow{tock} D$

     Es gelten auch $B \xrightarrow{tock} B$ und $B \mathrel{\mathcal{R}} D$, womit die rechte Seite der Implikation erfüllt ist.
   - Es gibt keine weiteren Kombinationen von s, t und $\alpha \in \mathit{Act}$ mit $s \mathrel{\mathcal{R}} t$ und $t \xrightarrow{\alpha} t'$.

Also ist $\mathcal{R}$ eine Bisimulation, die zeigt, dass $A \sim C$. ■